Bulletin of Nagano Women's Junior College №5　1－9，1997

背　　理　　法

(Reductio ad absurdum)

宮崎和順

§1　命　　題

(1)　命題とは、一つの判断を述べた文章で、真（正しい）か偽（正しくない）か考えられるものといってよいだろう。「述べた」は「主張した」といってよく、文章や式などもよいが、真偽の「考えられる」ものを「きめられる」とか「判断できる」というと少し言いすぎになる。真か偽かにわかに決められなくても、真か偽かいずれかと判断される。例えばフェルマーの大定理の述べているようなことがらは命題である。また代数における等式不等式なども一種の命題である。

（注意）命題と命題関数とはどう違うか、「2は6の約数である」のように変数を含まない文章で、真か偽かが定まっているのが「命題」の本来の意味、しかし高校などでは命題と命題関数を合わせて「命題」ということが多い。

$$\begin{array}{c}\text{命　題}\\ \text{（広い意味）}\end{array}\left\{\begin{array}{l}\text{命題（狭い意味）}\\ \text{命題関数}\end{array}\right.$$

(2)　複合命題（命題の合成）

いくつかの命題から「かつ」「または」「でない」「ならば」という言葉を使って新しい命題が作られる。このような命題を複合命題又は合成命題という。（もとの個々の命題を単一命題という）

i）命題の真偽

(イ)　2つの命題をp、qとする「p and q」（pかつq）を論理積（または合接）といい、「$p\wedge q$」と表わす。「p or q」（pまたはq）という命題を論理和（または離接）といい、「$p\vee q$」と表わす。$p\wedge q$、$p\vee q$、という命題の真偽は次の表に示すことができる。

p	q	$p\wedge q$			$p\vee q$		
T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T	F
F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	F	F	F	F	F	F

。この表ではTは真（true）、Fは偽（false）を表わす。この表を真理表とか真偽表とよんでいる。

(ロ)　否定命題

ア）単一命題の否定

命題pに対して否定「pではない」を$\tilde{p}$で表わすことにする。$\tilde{p}$と$\tilde{\tilde{p}}$の真偽表は次のようになる。

p	$\tilde{p}$	$\tilde{\tilde{p}}$
T	F	T
F	T	F

イ）合成命題の否定

$\widetilde{p\wedge q}$、$\tilde{p}\vee\tilde{q}$、$\widetilde{p\vee q}$、$\tilde{p}\wedge\tilde{q}$の真偽表は次のようになる。

p	q	$\widetilde{p\wedge q}$				$\tilde{p}\vee\tilde{q}$			$\widetilde{p\vee q}$				$\tilde{p}\wedge\tilde{q}$		
T	T	F	T	T	T	F	F	F	F	T	T	T	F	F	F
T	F	T	T	F	F	F	T	T	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	F	F	T	T	T	F	F	F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	F	F	T	T	T	T	F	F	F	T	T	T

よって

$\widetilde{p\wedge q}=\tilde{p}\vee\tilde{q}$、$\widetilde{p\vee q}=\tilde{p}\wedge\tilde{q}$（De Morgan の法則）となる。

ii) 命題の主張

命題は一つの判断を述べた（主張した）文章である。

(イ) 離接$p \vee q$はpまたはqの少なくとも一方が真であることを主張するものである。

(ロ) 合接$p \wedge q$はpおよびqが真であることを主張するものである。

(ハ) 否定$\widetilde{p}$はqが真でないことを主張するものである。

例題　次の英文を訳せ

（De Morgan の法則の利用）

① He can read and speak English.
He can not read or speak English.

② He is kind and diligent.
He is not kind or diligent.

③ He speaks English and French.
He does not speak English or French.

iii) 条 件 文

(イ) 命題「$p \to q$」の真偽

「$p \to q$」〝pならばqである〟という形の命題を条件文という。真偽表は右のように規約する。

p	q	$p \to q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

条件文は仮定が偽の場合真であることが気になる、これは上のように規約することによって命題についていろいろなことが大変都合よくなる。たとえば命題「$p \to q$」と対偶「$\widetilde{q} \to \widetilde{p}$」が同値ということもこの約束がないとさしつかえが起こる。たとえばaは実数を表わすとすると命題「$a \geqq 0$ならば$a^2 \geqq 0$」は真であるが、その対偶命題「$a^2 < 0$ならば$a < 0$」は真であってほしいわけである。ところが仮定$a^2 < 0$は明らかに偽である、よってこの規約については、次のように考えるとよい。

例題1　天気がよければ遠足に行くという文章について考えてみる。

p :（天気がよい）q :（遠足に行く）$p \to q$を〝天気がよければ遠足に行く〟と約束したとすると、この命題を真とすることを約束したのであるから、約束を破ったことになるのは、天気がよくて遠足に行かない場合だけである。

例題2　$3=8 \to 1=1$、$2=7$を導け。

（解）$\left.\begin{array}{l} 3=8 \\ 8=3 \end{array}\right\}$ 辺々加えて $11=11 \therefore 1=1$

$\left.\begin{array}{l} 3=8 \\ 1=1 \end{array}\right\}$ 辺々減じて $2=7$

偽から正しい推論によって真、偽な命題を引きだすことが出来る。よって真偽表は前図のように規約するのが妥当である。

問題　空集合の性質(1)、(2)を証明せよ。

(1) 空集合はただ1つである。

(2) 空集合はすべての集合の部分集合である。

（解）(1) 部分集合の定義$\forall x$（$x \in \mathrm{A} \to x \in \mathrm{B}$）のとき$\mathrm{A} \subseteqq \mathrm{B}$

空集合が2つあったとして、その1つをϕ、他の1つをϕ'としたとき$\phi = \phi'$がいえればよい。$\phi \ni x \to \phi' \ni x$は$\phi \ni x$が偽であるから、規約によって成立する　$\therefore \phi \subseteqq \phi'$、同様にして$\phi' \ni \to \phi \ni x$　$\therefore \phi' \subseteqq \phi$ ゆえに$\phi = \phi'$。

(2) $\phi \ni x \to \mathrm{A} \ni x$は$\phi \ni x$が偽であるから規約によって成立、ゆえに$\phi \subseteqq \mathrm{A}$。

いま命題p、qの複合命題$\widetilde{p} \vee q$の真偽表を作ってみる、これを「$p \to q$」の真偽表とくらべてみるとあらゆる場合に真偽が一致しているから「$p \to q$」と「$\widetilde{p} \vee q$」とは論理的に同値である。

p	q	$\widetilde{p} \vee q$			$p \to q$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	T

$\therefore p \to q = \tilde{p} \vee q$

この関係をわかりやすく理解するには、命題は一つの判断を述べた（主張した）文章であるから、上の関係の両辺をそれぞれ……であることを主張していると読んでみるとわかりやすい。

(ロ) 双条件文

p であるのは q であるとき、およびその時に限るという命題は（$p \to q$）∧（$q \to p$）であるが、これを双条件文とよんで $p \leftrightarrow q$ であらわす。

真偽表は右の通りである。

p	q	$p \leftrightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

iv）論理的に同値

2つの命題 p と $\tilde{\tilde{p}}$ については右下の表のように p の真偽による2つの場合がある、どの場合にも真偽が一致している。いくつかの命題 p、q、……から作られた複合命題の真偽が、一致するならば、2つの命題は論理的に同値であるというわけである。このような場合、たとえば $p = \tilde{\tilde{p}}$ のように書く（2重否定)、命題 p、q、……から作られた合成命題をP（p、q、r、…）と記号で表わすことにする。P（p、q、r、…）とQ（p、q、r、…）の真偽表が全く一致するとき、これらの命題は論理的に同値であると言い、P（p、q、r、…）＝Q（p、q、r、…）で表わす。

p	$\tilde{p}$	$\tilde{\tilde{p}}$
T	F	T
F	T	F

例題　$\tilde{p} \vee q$ と $p \wedge \tilde{q} \to \tilde{p}$ とは同値である。

（解）

p	q	$p \wedge \tilde{q} \to \tilde{p}$					$\tilde{p} \vee q$		
T	T	T	F	F	T	F	F	T	T
T	F	T	T	T	F	F	F	F	F
F	T	F	F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T	F

上の真偽表によって $\tilde{p} \vee q = p \wedge q \to \tilde{p}$ が証明できた。

v）恒(つね)に真である命題（tautology）

1つの典型的な文章は、ある場合には真で、他の場合には偽であるが、考えているすべての可能な場合に対して真である命題もあり得る。このような命題は論理的に真である命題（トートロジー）とよばれる。たとえば

$p \vee \tilde{p}$ とか $p \wedge$（$p \to q$）$\to q$ という命題を考えて見ると、p、q の真理値が何であっても、つねにその真理値がTとなる。このように、そこに現われる命題の真理値が何であっても、その真理値がつねに真となるものを、つねに真である命題結合またはトートロジーという。

$p \to q$ がトートロジーであるとき「p は q を導く」または「p は q を含意する」といって記号で $p \Rightarrow q$ と表わす。（いくつかの命題 p、q、r、……を含む合成命題P（p、q、r、…)、Q（p、q、r、…）に関する条件文P→Qがトートロジーであるとき、「PはQを導く」または「PはQを含意する」といい、この事実を記号でP⇒Qと表わす。）そして p は q であるための十分条件、q は p であるための必要条件であるという。

ここで注意を要することは、条件文 $p \to q$ は p と q から作られた合成命題であり、含意 $p \Rightarrow q$ は p と q との論理的な関係を示すということである。

また双条件文 $p \leftrightarrow q$ がトートロジーであるときは p と q は同値である。（q と p は同値である）といい、この事実を $p \Leftrightarrow q$ であらわす。双条件文 $p \leftrightarrow q$ が真となるのは p と q の真偽表が等しいときであるから、双条件文がトートロジーとなる、すなわち $p \Leftrightarrow q$ となるのは p と q の真偽表が完全に一致するときである。

条件文、双条件文の真理集合

(1)　$p(x)$、$q(x)$を命題関数とすると$p(x)\to q(x)=\overline{p(x)}\to q(x)$

$$
\begin{aligned}
p(x)\leftrightarrow q(x)&=(p(x)\to q(x))\wedge(q(x)\to p(x))\\
&=(\overline{p(x)}\vee q(x))\wedge(\overline{q(x)}\vee p(x))\\
&=(\overline{p(x)}\vee q(x))\wedge(p(x)\vee\overline{q(x)})
\end{aligned}
$$

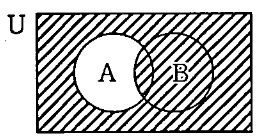
であるから

$A=\{x\mid p(x)\}$、$B=\{x\mid q(x)\}$　とすると

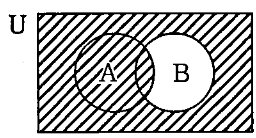
$p(x)\to q(x)$　の真理集合は$\overline{A}\cup B$である。

$p(x)\leftrightarrow q(x)$　の真理集合は　$(\overline{A}\cup B)\cap(A\cup\overline{B})$　である。

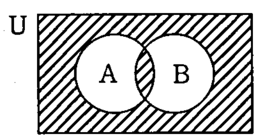
i）$p(x)\to q(x)$　の真理集合



ii）$q(x)\to p(x)$　の真理集合



iii）$p(x)\leftrightarrow q(x)$　の真理集合



(2)　トートロジーと矛盾の真理集合

Uの上の命題関数を$p(x)$　とすると、$p(x)$　がトートロジーであるということは、Uのすべての元xにたいして$p(x)$　が真であるということであるから、$\{x\mid p(x)\}=U$となる。また$p(x)$　が矛盾であるということは、Uのすべての元xに対して$p(x)$　が偽である。すなわち$\{x\mid p(x)\}=\phi$となる。よって次の定理が成り立つ。

定理　$p(x)$、$q(x)$　の真理集合をA、Bとすると

i）$p(x)\Rightarrow q(x)$となるのは$A\subseteqq B$のときおよびそのときに限る。

ii）$p(x)\Leftrightarrow q(x)$となるのは$A=B$のときおよびそのときに限る。

i）の証明

$p(x)\to q(x)$の真理集合は$\overline{A}\cup B$であり、$p(x)\Rightarrow q(x)$は$p(x)\to q(x)$がトートロジーとなることであるから、真理集合は$\overline{A}\cup B=U$が成立するということである。

(1)　$A\subseteqq B\to\overline{A}\cup B=U$の証明

(イ)　$\overline{A}\cup B\subseteqq U$は明らかに成立する。

(ロ)　$U=A\cup\overline{A}$

$\overline{A}\cup A\subseteqq\overline{A}\cup B(\because A\subseteqq B)$　$\therefore\overline{A}\cup B\supseteqq U$

よって(イ)と(ロ)より$\overline{A}\cup B=U$が成立する。

(2)　$A\subseteqq B\leftarrow\overline{A}\cup B=U$の証明

$$
\begin{aligned}
A\subseteqq A\cap U&=\overline{A}\cap(\overline{A}\cup B)\\
&=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap B)\\
&=\phi\cup(A\cap B)\subseteqq B
\end{aligned}
$$

$\therefore A\subseteqq B$

(1)と(2)より定理は証明された。

ii）の証明

i）より$p(x)\Rightarrow q(x)$なら$A\subseteqq B$、$p(x)\Rightarrow q(x)$なら$A\supseteqq B$　よって$A=B$となる。

（注意）$p(x)\to q(x)$について

◦$x\in P$をみたすxはすべて$x\in Q$をみたす

……古典論理

◦すべてのxについて「$x\in P\to x\in Q$」

……記号論理的な見方

よって条件文は「すべてのものについて」を省略してあると見る理解が必要である。

例題　$p\vee\overline{p}$、$p\wedge(p\to q)\to q$、$(p\to q)\wedge(q\to r)\to(p\to r)$　の真偽表を作ってみる。（トートロジーの例）

p	$\widetilde{p}$	$\widetilde{p} \vee \widetilde{p}$
T	F	T
F	T	T

p	q	$p \wedge (p \to q) \to q$				
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	F
F	T	F	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	F

p	q	r	$(p \to q) \wedge (q \to r) \to (p \to r)$				
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	T	F
T	F	T	F	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T	T	F
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

§2　推　　論

いくつかの命題の合接から他の命題が導かれるという主張をこれらの命題に関する推論という。たとえばp_1、p_2からqが導かれるという主張すなわち$p_1 \wedge p_2 \to q$がトートロジーであるという主張ではp_1、p_2を前提、qを結論といい、これを記号的に次のように書く。

$$\begin{array}{c} p_1 \\ p_2 \\ \hline \therefore q \end{array}$$

上の式の横線上にあるのが、前提、下にあるのが結論である。前提はp_1、p_2、……、p_nと3つ以上ある場合もある。推論は前提の合接が結論を導くとき、すなわち$p_1 \wedge p_2 \wedge \cdots\cdots \wedge p_n \Rightarrow q$のとき、有効であるといい、有効でない推論を謬論という。前提の合接をp、結論をqで書きあらわすと、推論の有効性は条件文$p \to q$がトートロジーであるかどうかで判定されるのであるから、条件文の真偽表から次の事がわかる。

(1)　前提の合接pが真（前提のすべての命題が真）のとき結論qが真のときおよびその時に限って推論は有効である。

(2)　前提が偽の時は、結論の真偽にかかわらず、つねに有効である。

$p \to q$を証明する場合、次のような直接証明法と、間接証明法の2つがある。（演繹とは前提から結論を論理的法則に従って導き出す考え方。）

i）直接証明法

認められた命題（前提）から出発し、つぎつぎと有効な推論を続けることによって与えられた命題が真であることを証明する方法をいう。

前提 $\xrightarrow{\text{有効な推論}}$ 命題 $\xrightarrow{\text{有効な推論}}$ …………、命題 $\xrightarrow{\text{有効な推論}}$ 結論

ii）間接証明法（条件文の変形）

排中律を使って、間接的に結論の真であることを導く証明法のことをいう。

イ）対偶命題$\widetilde{q} \to \widetilde{p}$による証明

例題　直線$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$において$a \neq b$ならば、この直線は点（$\dfrac{b}{2}$、$\dfrac{a}{2}$）を決して通らない。

（解）対偶を考える。直線$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$において（$\dfrac{b}{2}$、$\dfrac{a}{2}$）を通るならば$a=b$である。これを証明する。

$\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$上に（$\dfrac{b}{2}$、$\dfrac{a}{2}$）はあるから、

$\dfrac{b}{2a}+\dfrac{a}{2b}=1 \quad \therefore b^2+a^2=2ab$

$\therefore (a-b)^2=0 \quad \therefore a=b$、よって証明された。

ロ）背 理 法

この方法は「$p \wedge \widetilde{q}$」がすべての場合に偽であることを確認する証明のことであり、それは次の5つのどれかについて、その真であることを直接証明によって証明すればよい。

i）「$\widetilde{q} \to \widetilde{p}$」

ii）「$p \wedge \widetilde{q} \to \widetilde{p}$」

iii）「$p \wedge \widetilde{q} \to q$」

iv）「$p \wedge \widetilde{q} \to r \wedge \widetilde{r}$」（$r$は1つの命題）

v）「$p\wedge\tilde{q}\to\tilde{r}$」（$r$ は既知の真の命題）

背理法は上の5つの形に分類できる。i）の対偶命題による証明法も背理法ということができる。

（注意）排中律 $p\vee\tilde{p}$…「p である」と「$\tilde{p}$ でない」の一方が真であることを示すものである。

次に背理法が正しい論法であること、すなわち $p\to q$ と同値であることを簡単に扱ってみる。

i）$\tilde{q}\to\tilde{p}$ について

証明）$\tilde{q}\to\tilde{p}=\tilde{\tilde{q}}\vee\tilde{p}=q\vee\tilde{p}=\tilde{p}\vee q$、

$p\to q=\tilde{p}\vee q$　$\therefore\tilde{q}\to\tilde{p}=p\to q$

別解）

p	q	$\tilde{q}\to\tilde{p}$			$p\to q$
T	T	F	T	F	T
T	F	T	F	F	F
F	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T

左の表より $\tilde{q}\to\tilde{p}=p\to q$ が成立する。

ii）$p\wedge\tilde{q}\to\tilde{p}$ について

証明）$p\wedge\tilde{q}\to p=\widetilde{p\wedge\tilde{q}}\vee\tilde{p}$

$=(\tilde{p}\vee q)\vee\tilde{p}=(\tilde{p}\vee\tilde{p})\vee q$

$=\tilde{p}\vee q$、$p\to q=\tilde{p}\vee q$

$\therefore p\wedge\tilde{q}\to\tilde{p}=p\to q$

別解）

p	q	$\tilde{q}$	$p\wedge\tilde{q}\to\tilde{p}$					$p\to q$
T	T	F	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	F	T	T	T
F	F	T	F	F	T	T	T	T

上の真偽表より $p\wedge\tilde{q}\to\tilde{p}=p\to q$ が成立する。

iii）$p\wedge\tilde{q}\to q$ について

証明）$p\wedge\tilde{q}\to q=\widetilde{p\wedge\tilde{q}}\vee q$

$=(\tilde{p}\vee q)\vee q=\tilde{p}\vee q$、

$p\to q=\tilde{p}\vee q$

$\therefore p\wedge\tilde{q}\to q=p\to q$

別解）

p	q	$p\wedge\tilde{q}\to q$					$p\to q$
T	T	T	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	F	T

上の表より $p\wedge q\to q=p\to q$ が成立する。

iv）$p\wedge\tilde{q}\to r\wedge\tilde{r}$ について

証明）$p\wedge\tilde{q}\to r\wedge\tilde{r}=(\widetilde{p\wedge\tilde{q}})\vee(r\wedge\tilde{r})$

$=(\tilde{p}\vee q)\vee(\phi)=\tilde{p}\vee q$

$p\to q=\tilde{p}\vee q$

$\therefore p\wedge\tilde{q}\to r\wedge\tilde{r}=p\to q$

別解）

p	q	$p\wedge\tilde{q}\to r\wedge\tilde{r}$					$p\to q$
T	T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T	F	T

上の表によって $p\wedge\tilde{q}\to r\wedge\tilde{r}=p\to q$ が成立する。

v）$p\wedge\tilde{q}\to\tilde{r}$ について

証明）$p\wedge\tilde{q}\to\tilde{r}=(\widetilde{p\vee\tilde{q}})\vee\tilde{r}$

$=(\tilde{p}\vee q)\vee\phi=\tilde{p}\vee q$、

$p\to q=\tilde{p}>q$

$\therefore p\wedge\tilde{q}\to\tilde{r}=p\to q$

別解）

p	q	$p\vee\tilde{q}\to\tilde{r}$					$p\to q$
T	T	T	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	F	F	F
F	T	F	F	F	T	F	T
F	F	F	F	T	T	F	T

上の表によって $p\wedge\tilde{q}\to\tilde{r}=p\to q$ が成立する。

以上の5つの証明によって間接証明法（背理法）は正しい論法であることが証明できたわけである。

また $p\to q$ が正しいことを証明するとき、結

論の否定すなわちqを仮定して不合理（矛盾）を導びけばよいことが明確化されたわけである。

ⅰ）～ⅴ）まで一応真偽表を書いてみましたが、真偽表の方が理解しやすい面を持っているように思う。

間接証明法（背理法）に関する例題

ⅰ）$\widetilde{q}\to\widetilde{p}$について

問題　$x^2 \fallingdotseq y^2$ならば$x \fallingdotseq y$である。

証明）この命題を証明する代わりに、この対偶命題　$\widetilde{x \fallingdotseq y} \to \widetilde{x^2 \fallingdotseq y^2}$すなわち$x=y\to x^2=y^2$を証明すればよい。

$x=y$の両辺にx、yをそれぞれかけて、

$x=y\to x^2=xy$、$xy=y^2$

$\therefore x^2=y^2(x^2-y^2=(x+y)(x-y)=0$

$\therefore x^2=y^2$としてもよい。）

したがって$x=y\to x^2=y^2$が成立することが証明できた。

ゆえに$x^2 \fallingdotseq y^2\to x \fallingdotseq y$が成立することが証明された。

ⅱ）$p\wedge\widetilde{q}\to\widetilde{p}$について

問題　x、y、zが正の整数で$x^2+y^2=z^2$のとき、x、y、zのうち、少なくとも1つは偶数である。

証明）p：$x^2+y^2=z^2$が成立する。

q：x、y、zのうち少なくとも1つは偶数である。とp、qをすると、題意は$p\to q$を証明することになる。

$\widetilde{q}$：x、y、zのうち少なくとも1つは偶数であるの否定すなわち：x、y、zのすべてが奇数である、と仮定すると、(奇数)^2＝奇数であるから、x^2+y^2が偶数で、z^2は奇数となり、$x^2+y^2=z^2$は成立しない。すなわち$\widetilde{p}$となる。

よって$p\wedge\widetilde{q}\to\widetilde{p}$が成立することが証明された。

ゆえに、$p\to q$すなわち、x、y、zが正の整数で$x^2+y^2=z^2$のときx、y、zのうち少なくとも1つは偶数であることが正しいことが証明された。

ⅲ）$p\wedge\widetilde{q}\to q$について

問題　mが正の整数で、2^m-1が素数なら、mは素数である。

証明）p：2^m-1が素数である。

q：mは素数である。とp、qをする。

$p\wedge\widetilde{q}$すなわち2^m-1が素数かつmは素数でないようなmがあったと仮定すると、このとき、$m=a\cdot b$（a、bを正の整数）と書けるから、$2^m-1=2^{a\cdot b}-1=(2^a)^b-1=(2^a-1)\{(2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-2}+\cdots\cdots+2^a+1\}$ a、bが正の整数であるから、上の式の2つのかっこの中はともに正数である。したがって、2^a-1は2^m-1の因数である。

2^m-1は素数であるから、その因数2^a-1は1か2^m-1のいずれかである。すなわち$2^a-1=1$、または$2^a-1=2^m-1$、ゆえに$a=1$または$a=m$、$m=a\cdot b$とすると$a=1$または$a=m$となるのであるから、mは素数である。すなわち「$p\wedge\widetilde{q}\to q$」を導くことができたので、$p\to q$が証明出来たことになる。

ⅳ）$p\wedge\widetilde{q}\to r\wedge\widetilde{r}$について

問題　2つの円が互いに接するとき、その接点は2つの円の中心を結ぶ直線上（中心線上）にある。

証明）p：2円O_1とO_2が接する。

q：中心線は接点を通る。

r：2円の共有点が1こである。とする。

$p\wedge\widetilde{q}$すなわち中心線が接点を通らないと仮定すると円はその直径に対して対称であるから、中心線に関して対称な共有点が2こあることに

なる。よって、2円O_1、O_2は接する。すなわちrであり、かつ共有点が2こある。すなわち$\tilde{r}$である。よって$r \wedge \tilde{r}$が成立することになり、結局「$p \wedge \tilde{q} \to r \wedge \tilde{r}$」が導びかれたことになり、この問題は証明されたことになる。

v）$p \wedge \tilde{q} \to \tilde{r}$について

問題　相異なる3つの直線a、b、cについて、$a \parallel c$かつ$b \parallel c$ならば$a \parallel b$である。

証明）p：$a \parallel c$かつ$b \parallel c$である。

q：$a \parallel b$である。

r：直線外の1点を通って、その直線に平行な直線は1つに限って引くことができる。（平行線の公理～恒に真である。）

$\tilde{q}$：$a \nparallel b$と仮定すると、aとbは交わる。また、aとbは異なる直線であるから、aとbとの交点を通ってcに平行な直線a、bが2つ存在することになって、公理に反する。すなわち$\tilde{r}$が証明されたことになる。

よって「$p \wedge \tilde{q} \to \tilde{r}$」を導くことができたので、$p \to q$が証明出来たことになる。

ハ）転 換 法

いくつかの条件文$p_1 \to q_1$、$p_2 \to q_2$、……、$p_n \to q_n$はすべてトートロジーであるとき、次の2つが示されたとする。

①　p_1、p_2、……、p_nがあらゆる場合をつくしている。

②　q_1、q_2、……、q_nはどの2つも両立しない。

条件文$p_1 \to q_1$、$p_2 \to q_2$、……、$p_n \to q_n$の逆$q_1 \to p_1$、$q_2 \to p_2$……、$q_n \to p_n$はすべてトートロジーとなる。これはすべて背理法で証明することができる。この原理を利用する証明法を転換法という。

これは$q_1 \to p_1$、$q_2 \to p_2$……、$q_n \to p_n$を証明するのに$p_1 \to q_1$、$p_2 \to q_2$、……、$p_n \to q_n$がトートロジー、①、②を確かめるという方法である。

例題　$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$の判別式をD＝$b^2 - 4ac$とすると

1）D＞0⇄相異なる2実根

2）D＝0⇄重根

3）D＜0⇄相異なる2虚根となることを証明せよ。

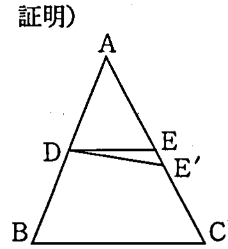
証明）(イ)　解（根）の公式よりD＞0→相異なる2実根、C＝0→重根、D＜0→相異なる2虚根は明らかに成立する。

(ロ)　i）相異なる2実根→D＞0、ii）重根→D＝0、iii）相異なる2虚根→D＜0 i）においてD$\not>$0とするとD＝0またはD＜0となり(イ)より重根または相異なる2虚根をもつことになって、仮定相異なる2実根に反する、よってi）は証明された。ii)、iii）についても同様である。（①、②を満たしているからこの証明は転換法である。）

ニ）同一法（背理法の変形である）

例題　3角形の2辺を相等しい比に内分（または外分）する2点を結ぶ直線は第3辺に平行である。

証明）



△ABCにおいて、AB、ACを相等しい比に内分（または外分）する点をそれぞれD、Eとすると、DE∥BCであることを証明すればよい。そこで今Dを通ってBCに平行線を引いて辺AC（またはその延長）とE′において交わらせると、AD：DB＝AE′：E′C、従ってAD：DB＝AE：ECのときはAE′：

Ｅ′Ｃ＝ＡＥ：ＥＣ。しかるにＡＣを相等しい比に内分（または外分）する点は唯一つに限る。（でないとすると内分点が２つあることになって不合理〜背理法）従ってＥ′はＥと一致しなければならない。

∴　ＤＥ∥ＢＣ